Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint\limits_E f\ dV = \iint\limits_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int\limits_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\ dz \Big)\ dx\ dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint\limits_E f\ dV = \int\limits_{\pi_3(E)} \Big(\iint\limits_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{roviny } \mathbb{R}^2\times\{z\}}} f(x,y,z)\ dx\ dy \Big)\ dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

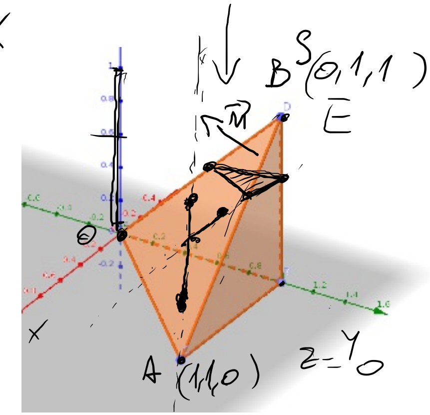
Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_E xy\,dV$, kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

$$\iiint\limits_E xy\,dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy\,dz\,dx\,dy$$

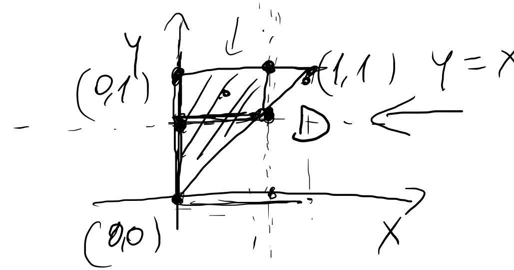
$z = y - x$

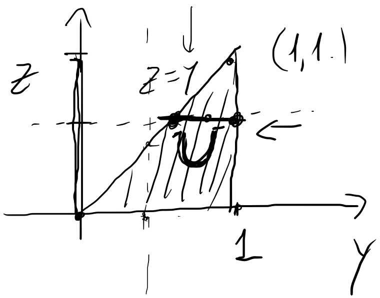
$x - y + z = 0$



$$\iint_D \int_0^{y-x} xy\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} xy\,dz\,dy\,dx$$





$$\iint_U \int_0^{y-z} xy\,dx\,dA$$

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^{y-x} xy\,dx\,dy\,dz$$

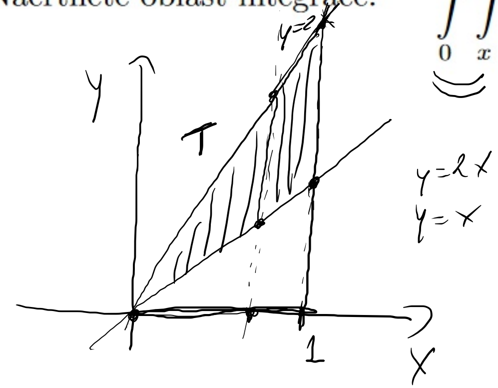
$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy\,dx\,dz\,dy$$

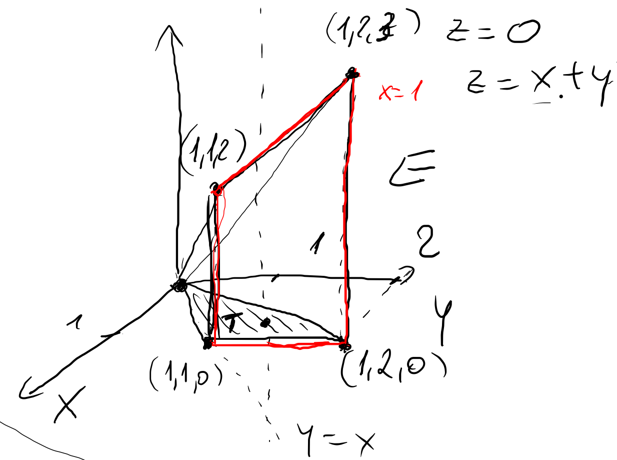
$S: \quad \vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB}$

$X = (x,y,z) \qquad \vec{n} \cdot (\vec{X - A}) = 0$

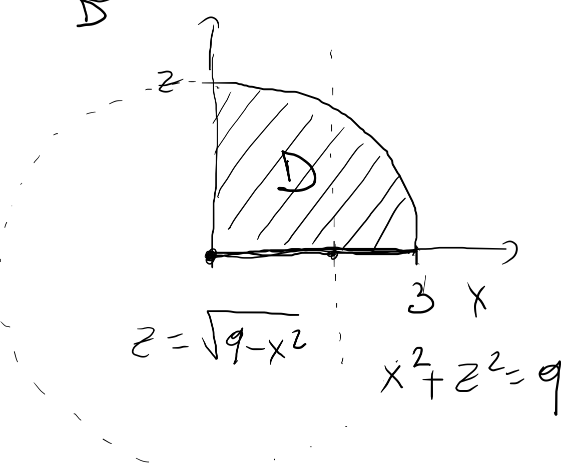
$ax + by + cz + d = 0$

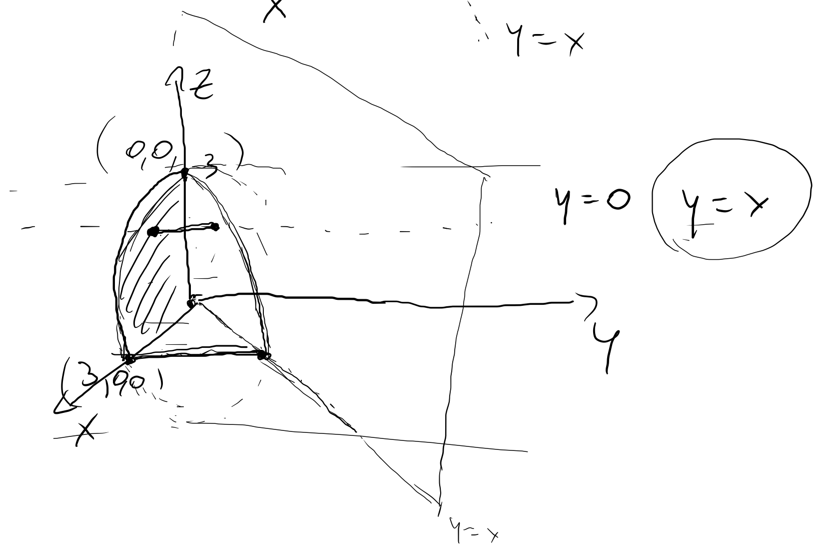
Načrtněte oblast integrace: $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$





$\underbrace{\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}}}_{D} \int_0^x f dydzdx,$



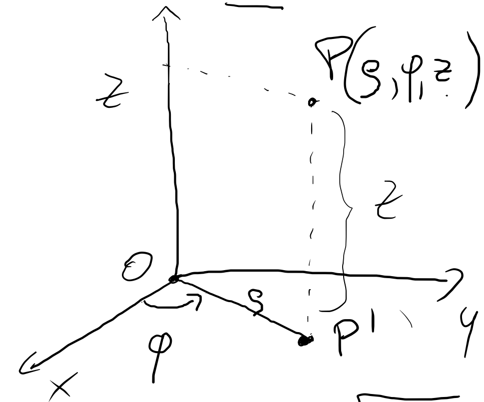


Podívejme se nyní na cylindrické souřadnice.

$$x = \varrho\cos\varphi$$
$$y = \varrho\sin\varphi \qquad \varrho \geq 0,\ z \in \mathbb{R},\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$
$$z = z.$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_\Phi = |\det J_\Phi| = \varrho.$$

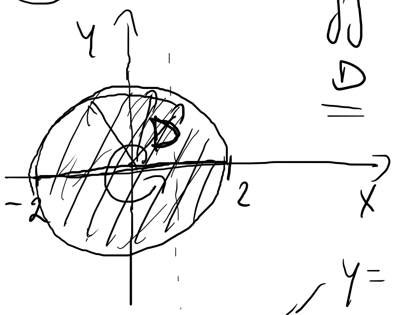
$$x^2+y^2 = \varrho^2$$



pomocí cylindrických souřadnic spočítejte:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

$$\iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dA$$



$$y = -\sqrt{4-x^2}$$
$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$x^2+y^2 = 4$$

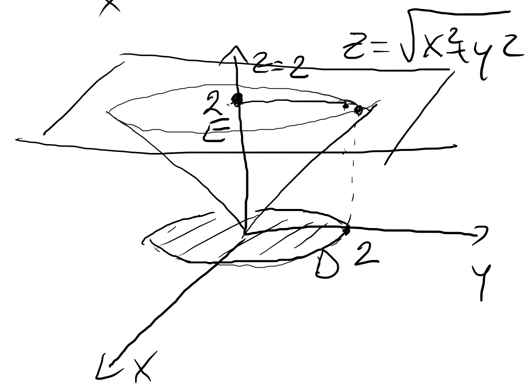
$$z = 2 \rightsquigarrow \text{cyl. } z = 2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_\varrho^2 \varrho^2\varrho\, dz\, d\varrho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \varrho^3 \left[z\right]_\varrho^2 d\varrho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^2 (2\varrho^3 - \varrho^4)\, d\varrho =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\varrho^4}{2} - \frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi\left[8 - \frac{32}{5}\right].$$



spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x,y,z) = 1$ vzhledem k jeho ose symetrie

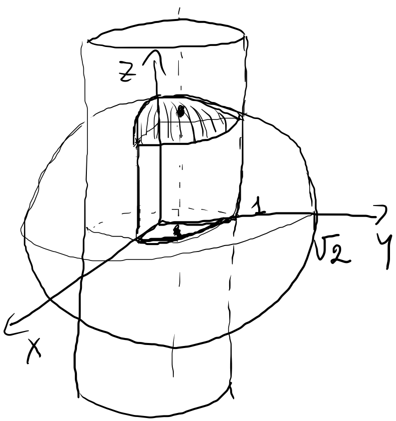
Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint_E v^2(x,y,z)\cdot \varrho(x,y,z)\,dV$$

kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

Určete moment setrvačnosti J tělesa $E:\ x^2+y^2+z^2 \le 2\ \&\ \underline{x^2+y^2 \le 1}\ \&\ x,y,z \ge 0.$ $\underline{\varrho(x,y,z) = 1}$

vzhledem k ose otáčení z.



$$\iint_{D} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dA = \text{cyl.}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{2-\varrho^2}} \varrho^2\varrho\,dz\,d\varrho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \varrho^3\,[z]_0^{\sqrt{2-\varrho^2}}\,d\varrho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \varrho^3\sqrt{2-\varrho^2}\,d\varrho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi \cdot \int_2^1 -\frac{1}{2}(2-u)\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{2}\left[-u^{3/2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}u^{5/2}\cdot\frac{2}{5}\right]_2^1$$

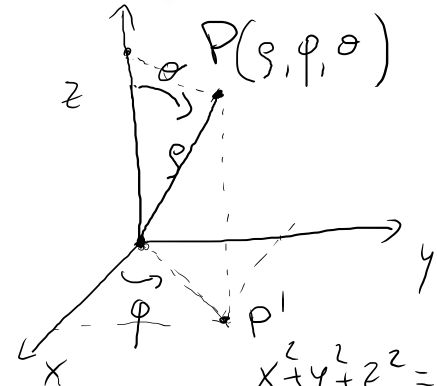
$$= \ldots\ldots$$

$$\int_0^1 \underbrace{\varrho^3}_{\varrho\cdot\varrho^2}\sqrt{2-\varrho^2}\,d\varrho = \left|\begin{array}{ll} u = 2-\varrho^2 & \varrho^2 = 2-u \\ du = -2\varrho\,d\varrho & \varrho = 0 \rightsquigarrow u = 2 \\ & \varrho = 1 \rightsquigarrow u = 1 \end{array}\right|$$

Sférické souřadnice mají předpis:.

$$x = \varrho \sin\vartheta \, \cos\varphi$$
$$y = \varrho \sin\vartheta \, \sin\varphi \qquad \varrho \geq 0, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \ \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$$
$$z = \varrho \cos\vartheta.$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -\varrho\sin\vartheta\sin\varphi & \varrho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \varrho\sin\vartheta\cos\varphi & \varrho\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \Delta_\Phi = \varrho^2 \sin\vartheta.$$

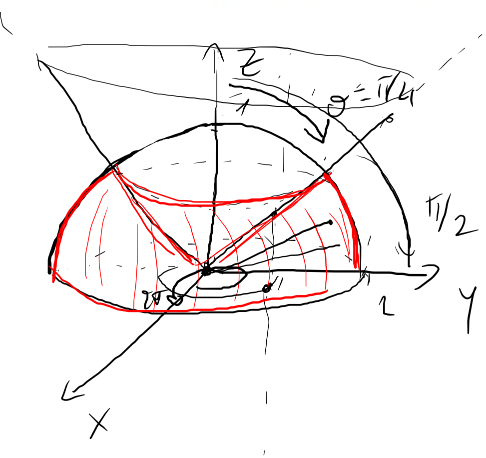


$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

3 Vypočtěte

$$\iiint\limits_E x^2 + y^2 + z^2 \; dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2\pi.$$

Nalezněte objem tělesa M ohraničeného plochami $z = x^2 + y^2 + z^2$, a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5 Vypočtěte

$$\iiint\limits_E \frac{x^2}{x^2+z^2}\, dV,$$

kde $E = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2,\ y > 0,\ x^2-y^2+z^2 < 0\}$.

Nalezněte objem tělesa M ohraničeného plochami $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $z + y = 2$.

$$\text{Objem}(M) = \iiint_M 1 \cdot dV$$

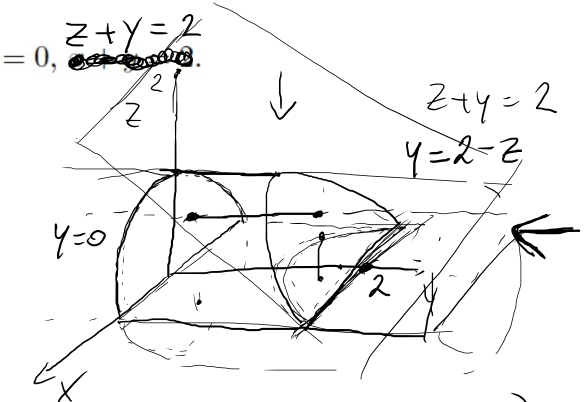
$$= \iint_D \int_0^{2-z} dy \, dA$$

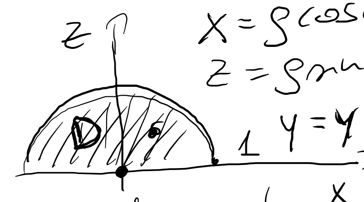
$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{2-\varrho \sin\varphi} \varrho \, dy \, d\varrho \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 \varrho (2 - \varrho \sin\varphi) \, d\varrho \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\varrho^2 - \frac{\varrho^3}{3} \sin\varphi \right]_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \pi + \frac{1}{3} \left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \pi - \frac{2}{3} \ (?)$$





$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi \\ z &= \varrho \sin\varphi \\ y &= y \end{aligned}\right\}$$

$$|\det J_\varphi| = \underline{\varrho}$$

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz \, dy \, dx \, .$$